série n°8

Exercice 1

I/ Donner le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes ainsi que leur fonction dérivée

1/ $f(x) = x\ln(x^2 - 4x - 5)$ 2/ $g(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ 3/ $h(x) = \ln(\dfrac{x+2}{x-3})$

II/ Donner le domaine de définition ainsi qu'une fonction primitive

1/ $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+3}$ 2/ $g(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ 3/ $h(x) = \dfrac{x^5 + 4x^3 - 5}{x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2x - x\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; interpréter graphiquement

2/a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/a) Déterminer l'intersection de (ζ_f) avec l'axe des abscisses

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

4/ Tracer (ζ_f) dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 3

I/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$

1/ Dresser le tableau de variation de g

2/ Calculer g (1) et en déduire le signe de g(x) pour x de $]0,+\infty[$

II/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm)

1/a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f.

2/a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : y = x - 1 est une asymptote à (ζ_f)

b) Etudier la position de (ζ_f) par rapport à (Δ)

3/ Tracer (Δ) et (ζ_f)

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h ; Tracer dans le même repère que (ζ_f), la courbe représentative $(\zeta_{h^{-1}})$ de h^{-1}

5/ Donner la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1

EXERCICE N°4

$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ étant un repère de l'espace ξ

Soit P et Q les plans d'équations respectives : $x + 2y - z + 1 = 0$ et $x - y - z - 2 = 0$

1/ Montrer que P et Q sont perpendiculaires

2/ a) Donner une équation cartésienne de la sphère de centre I (1 , 2 ,0) et tangente à P

b) Montrer que S et Q sont sécants et caractériser $S \cap Q$

3/ soit $\Delta = P \cap Q$

a) Calculer $d(I,\Delta)$

b) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S' de centre I et tangente à Δ

c) Donner les coordonnées du point de contact de Δ et S'

Exercice N°5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit les points A(0,0,-1) B(1,1,-1) C($\frac{-1}{2}$,0,0) et I(1,2,-2)

1) Ecrire une équation cartésienne du plan P contenant A,B et C

2) a)Vérifier que I n'appartient pas à P

b) Calculer le volume du tétraèdre IABC

3) Ecrire une représentation paramétrique de la droite D perpendiculaire à P et passant par I

4) Soit le plan Q : $- x + y + 4z + 4 = 0$

a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires

b) Vérifier Que A et B sont deux points de Q

c) Déduire une représentation paramétrique de l'intersection de P et Q

d) Calculer la distance du point I aux plans P et Q

e) Déduire la distance de I à la droite (AB)

Exercice N°6

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse.

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Soit Δ une droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$;$\alpha \in \mathbb{R}$

a) $d(O,\Delta) = 0$ b) $d(O,\Delta) = \sqrt{3}$ c) $d(O,\Delta) = 3$

2/ L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à

a) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ b) $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}\right\|$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

3/ P et Q deux plans sécant suivant une droite Δ , si $\overrightarrow{n_p}$ est un vecteur normale de P et $\overrightarrow{n_Q}$ est un vecteur normale de Q alors un vecteur directeur de Δ est :

a) $\overrightarrow{n_P} + \overrightarrow{n_Q}$ b) $\overrightarrow{n_P} - \overrightarrow{n_Q}$ c) $\overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q}$

4/ On donne $A(0,6,0)$ et $B(6,0,0)$. Une équation du plan médiateur du segment [AB] est :

a) $x - y + 1 = 0$ b) $x + y + z - 6 = 0$ c) $x - y = 0$